

חזקות

הגדרה

חזקה היא פעולה ממוצאת אשר משמעותה קיצור פעולת כפל של מספר בעצמו.

בסיס החזקה-המספר אותו כופלים בעצמו	$\leftarrow 2^3 \rightarrow$	מעריך החזקה- מעיד על כמות הפעמים בה המספר מוכפל בעצמו
------------------------------------	------------------------------	---

לדוגמה: $2^3 = 2 \times 2 \times 2$

בסיס 0

$$0^a = 0$$

$$0^0 = ?$$

בסיס 1

$$1^a = 1$$

מעריך 0

$$x^0 = 1$$

מעריך 1

$$x^1 = x$$

בסיס חיובי / שלילי

- בסיס חיובי – התוצאה תהיה חיובית
- בסיס שלילי – כאשר המעריך זוגי התוצאה תהיה חיובית, לדוגמה:

$$(-4)^6 = \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}}$$

כאשר המעריך שלילי התוצאה תהיה תוצאה שלילית, לדוגמה:

$$(-4)^5 = \underbrace{(-4)}_{\text{שלילי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}} \times \underbrace{(-4)}_{\text{חיובי}}$$

מעריך שלילי

$$8^{-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

אי אפשר לכפול מספר בעצמו מספר שלילי של פעמים, לכן מספר שלילי במעריך מציין הפעלת אותו מעריך בסימן חיובי על המספר ההופכי. לדוגמה:

- משנים את הבסיס למספר ההופכי
- משנים את המעריך למספר הנגדי

חוקי חזקות

כדי לבצע פעולה בין חזקות יש לקיים 2 תנאים:

- הפעולה בין החזקות הינה כפל או חילוק
- לחזקות יש חלק משותף – אותו בסיס / אותו מעריך

כפל חזקות בעלות בסיס זהה:

כשנכפול חזקות בעלות בסיסים זהים נקבל תוצאה בעלת אותו בסיס ומעריך שהוא סכום המעריכים של החזקות אותן כפלנו.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$3^2 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$$

$$6^5 = 6^2 \times 6^3 \quad \text{לדוגמה:}$$

חלוקת חזקות בעלות בסיס זהה:

כשנחלק חזקות בעלות בסיסים זהים נקבל חזקה בעלת אותו בסיס ומעריך שהוא הפרש המעריכים של החזקות אותן חלקנו.

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\frac{2^6}{2^4} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2^2$$

לדוגמה:

העלאה בחזקה של מכפלה או מנה:

כל אחד מחלקי המנה או המכפלה מקבל את מעריך החזקה.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$$

$$(x \times y \times z)^3 = x \times y \times z \times x \times y \times z \times x \times y \times z = x^3 \times y^3 \times z^3$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4^6}{5^6}$$

לדוגמה:

העלאת חזקה בחזקה

כשנבצע פעולת חזקה על חזקה קיימת, בעצם נגרום להכפלת החזקה בעצמה מספר מסוים של פעמים.

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

נקבל חזקה חדשה שמעריכה הוא מכפלת המעריכים ובסיסה נותר ללא שינוי.

לדוגמה:

$$(4^3)^5 = (4 \times 4 \times 4)^5 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^{3 \times 5} = 4^{15}$$

חיבור/חיסור חזקות

ניתן לבצע כאשר יש בסיס משותף ע"י הוצאת גורם משותף.

$$5^6 - 5^4 = 5^{4+2} \times 5^4 = 5^4(5^2 - 1) = 5^4(25 - 1) = 24 \times 5^4$$

לדוגמה:

עבודה עם בסיסים ומעריכים שונים

יש להגיע לבסיס משותף ולהמשיך לפי חוקי חזקות.

$$9^5 \times 3^4 = (3^2)^5 \times 3^4 = 3^{10} \times 3^4 = 3^{14}$$

לדוגמה:

השוואת חזקותשיווין מעריכים

- מעריך חיובי-

$$b^n < a^n \quad \text{אם } 0 < n < 1 \text{ ו- } 0 < b < a$$

לדוגמה:

$$5^7 < 9^7$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5 < \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

- מעריך שלילי-

$$a^n < b^n \quad \text{אם } 0 < b < a \text{ ו } n < 0 \text{ אז}$$

לדוגמה:

$$(9)^{-7} < (5)^{-7}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-5} < \left(\frac{2}{5}\right)^{-5}$$

שיוויון בסיסים

- מעריך גדול מ-1

$$a^n < a^m \quad \text{אם } a > 1 \text{ ו } n < m \text{ אז}$$

$$5^7 < 5^{11} \quad \text{לדוגמה:}$$

- מעריך שבר חיובי-

$$a^m < a^n \quad \text{אם } 0 < a < 1 \text{ ו } n < m \text{ אז}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^5 < \left(\frac{5}{7}\right)^4 \quad \text{לדוגמה:}$$