שורשים

הגדרות

פעולת השורש היא הפעולה ההופכית לחזקה.

ניתן להגדיר את פעולת השורש גם כפעולת חזקה כאשר המעריך הוא שבר.

השורש עונה על השאלה" איזה מספר אני אעלה בחזקת b כדי לקבל x^a ?"

$$\sqrt[b]{x^a} \longrightarrow ?^b = x^a$$

לדוגמה:

$$\sqrt[3]{8} \longrightarrow ?^3 = 8 \longrightarrow 2$$

מעבר משורש לחזקה

- המכנה בחזקה מייצג את הסדר של השורש
- המונה בחזקה מייצג את החזקה בה נמצא הבסיס
- כאשר לא מצוין סדר השורש, הכוונה היא לשורש ריבועי, מסדר 2

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

$$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x^1} = \sqrt[a]{x}$$

לדוגמה:

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

שורשים נפוצים שכדאי לזכור

$\sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[5]{32} = 2$

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{144} = 12$

$\sqrt{169} = 13$

$\sqrt{196} = 14$

$\sqrt{225} = 15$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{2} \cong 1.4 - 1.5$

$\sqrt{3} \cong 1.7 - 1.5$

סדר גודל של שורש לא מוכר

נזהה בין אילו שני שורשים מוכרים נמצא השורש וכך נדע את הטווח בו הוא נמצא

$$\sqrt{18} \longrightarrow \sqrt{16} between \sqrt{25} = 4 between 5$$

חוקי שורשים

ניתן לבצע פעולות כפל וחילוק בלבד בין שורשים.

<u>כפל שורשים בעלי סדר זהה</u>:

ניתן לכפול שורשים בעלי אותו סדר בלבד. נקבל שורש מאותו הסדר, שתחתיו נמצאת מכפלת האיברים המקוריים שהיו תחת שורש.

$$\sqrt[a]{x}\sqrt[a]{y} = \sqrt[a]{xy}$$

לדוגמה:

$$\sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{8}$$
$$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{10}$$

<u>חלוקת שורשים ממעלה זהה</u>:

ניתן לחלק שורשים בעלי אותו סדר בלבד. נקבל שורש חדש מאותו הסדר, שתחתיו נמצאת מנת האיברים המקוריים שהיו תחת שורש.

$$\sqrt[a]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}}$$

לדוגמה:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt[5]{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{7}}$$

<u>שורש של שורש</u>:

בדומה לחזקה, מדובר על כפל של מעריכים. חשוב לשים לב שהמעריכים הם שברים לכן נקבל שורש חדש שהסדר שלו הוא מכפלת המעלות של השורשים המקוריים.

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a\cdot b]{x}$$

לדוגמה: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[5\times3]{7} = \sqrt[15]{7}$

<u>חיבור וחיסור שורשים</u>

אין חוקים לחיבור וחיסור. במקרה של שורש זהה כדאי לחשוב על גורם משותף.

לדוגמה: $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{4} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{4} - 1\right) = \sqrt{2}\,(2-1) = \sqrt{2}$

מצבים נפוצים שנובעים מהחוקים

$$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{9}=3 \qquad \sqrt{x}\sqrt{x}=x$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \qquad \frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

פעולות בין מספרים שלמים לשורשים

ניתן לבצע פעולות כפל וחילוק בלבד.

<u>חילוק</u>

יש להציג את המספר השלם כמכפלת שורשיו או כמכפלה של מספרים שלמים הקשורים לשורש, ולצמצם .

השאיפה שלנו היא דרך הצגה שמאפשרת לעשות שימוש בחוקים.

לדוגמה:

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=?$$

$$\frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot 3=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{18}$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=?$$

$$\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{36}{2}}=\sqrt{18}$$

<u>כפל</u>

יש להציג את המספר השלם כמכפלת שורשיו או לפרק את השורש למכפלת שורשים שאחד מהם ניתן להמיר למספר שלם.

השאיפה שלנו היא דרך הצגה שמאפשרת לעשות שימוש בחוקים.

לדוגמה:

$$4\times\sqrt{8}=?$$

$$4\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}=4\times 2\times\sqrt{2}=8\times\sqrt{2}$$

$$4\times\sqrt{8}=?$$

$$\sqrt{4}\times\sqrt{4}\times\sqrt{8}=\sqrt{16\times 8}=\sqrt{128}$$

השוואות שורשים

<u>שיויון סדר השורשים</u>

- בסיס חיובי-

אם $0<b<a$ אז $\sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{a}$

לדוגמה: $\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{7}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

<u>שיויון בסיסים</u>

- בסיס גדול מ-1

אם $1<a$ ו $n<m$ אז $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$

לדוגמה: $\sqrt[5]{3} < \sqrt[3]{3}$

- בסיס שבר חיובי

אם $0<a<1$ ו $n<m$ אז $\sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$

לדוגמה: $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$